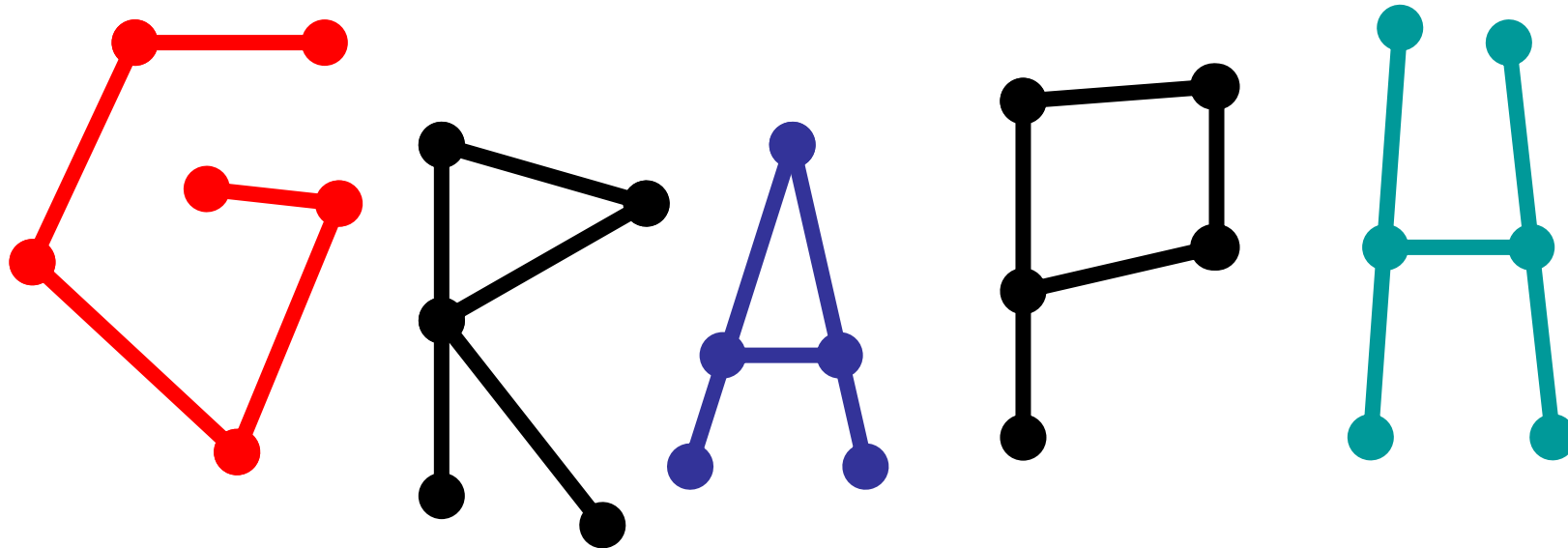


ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

CU 362

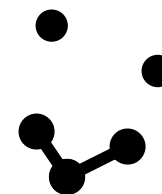
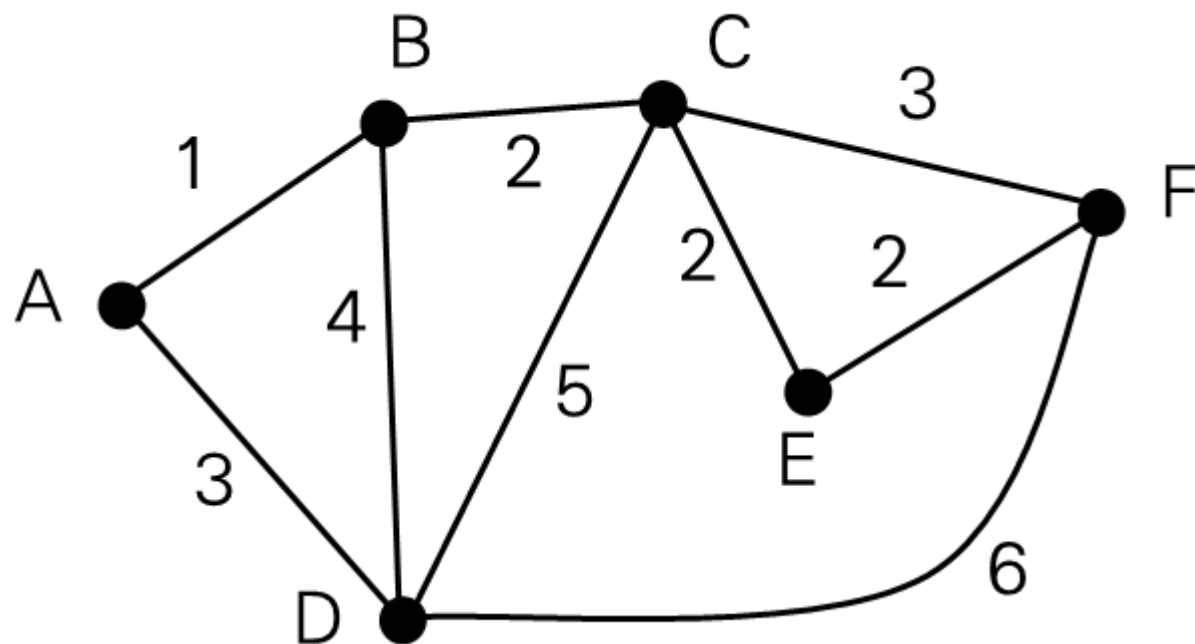
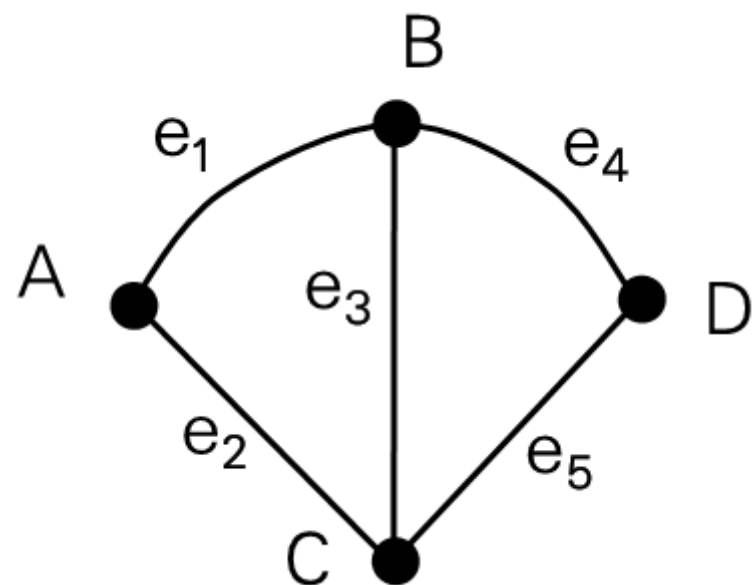
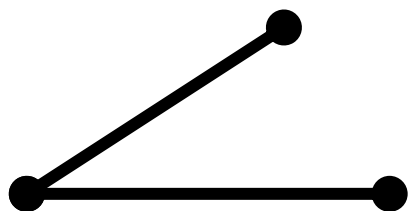


อ.สุรชัย อินทสังข์

ภาควิชาหลักสูตรและการสอน

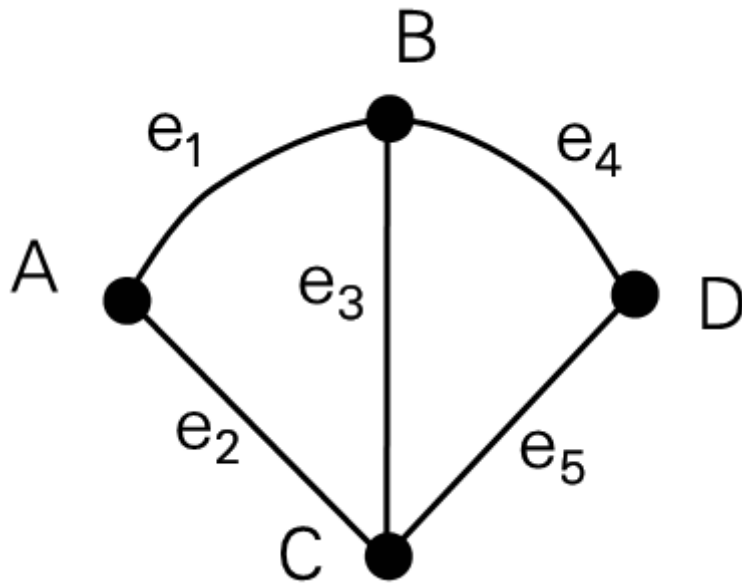
คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ตัวอย่างของกราฟ



ส่วนประกอบของกราฟ (G)

- เซตของ **จุดยอด** (vertices) แทนด้วย $V(G)$
- เซตของ **เส้นเชื่อม** (edges) แทนด้วย $E(G)$



$$G = (V, E)$$

$$V(G) = \{A, B, C, D\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

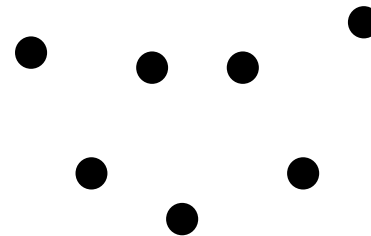
ข้อสังเกต

- $V(G)$ เป็นเซตว่างได้หรือไม่

ไม่ได้ เพราะถ้าไม่มีจุดยอดเลย ก็ไม่มีอะไรให้พิจารณาเป็นกราฟได้เลย

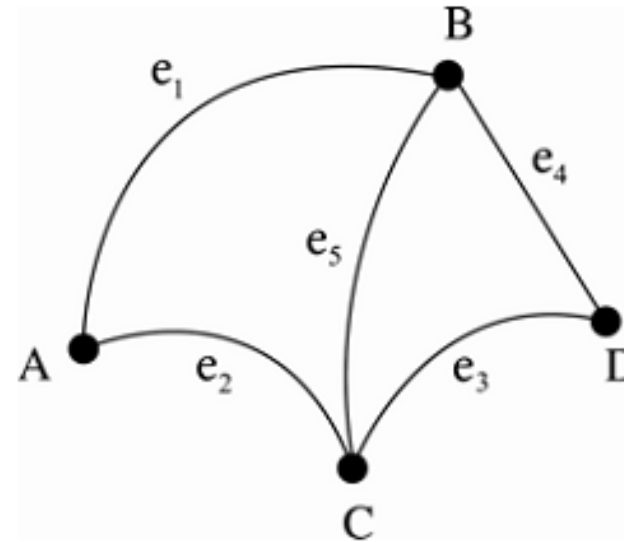
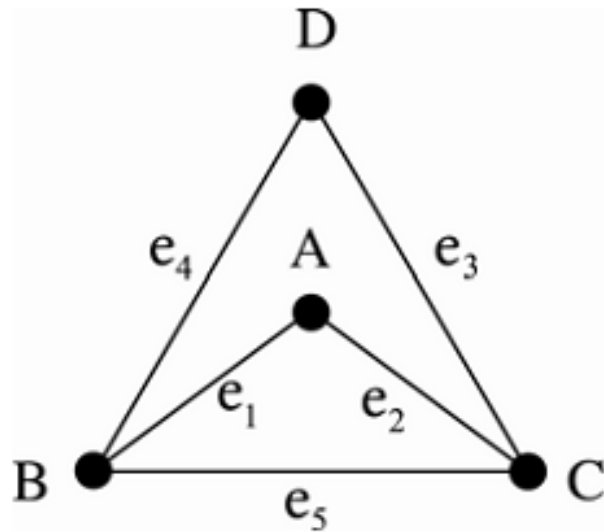
- $E(G)$ เป็นเซตว่างได้หรือไม่

ได้



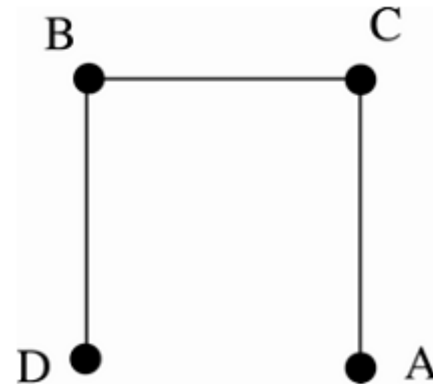
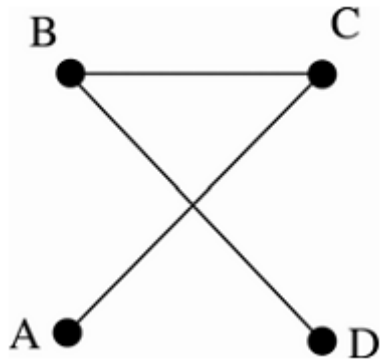
ข้อสังเกต

- เส้นเชื่อม เป็นส่วนของเส้นตรง หรือ เส้นโค้ง ก็ได้



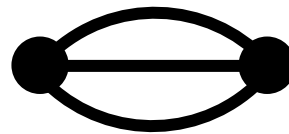
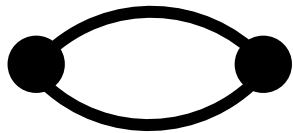
ข้อสังเกต

- เส้นเชื่อมสองเส้นอาจตัดกันได้ โดยจุดตัดไม่ถือเป็นจุดยอด

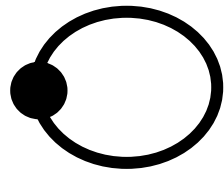


ลักษณะของเส้นเชื่อม

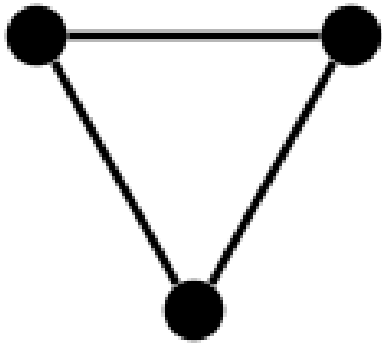
- **เส้นเชื่อมขนาน** (parallel edges)



- **วงวน** (loop)

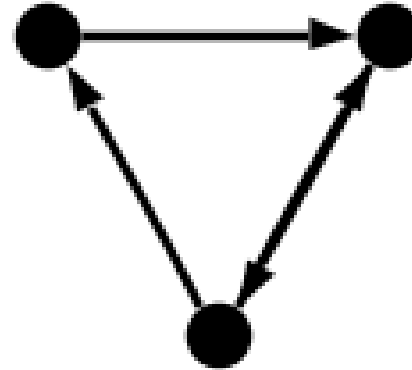


การจำแนกประเภทของกราฟ



Non-directed graph

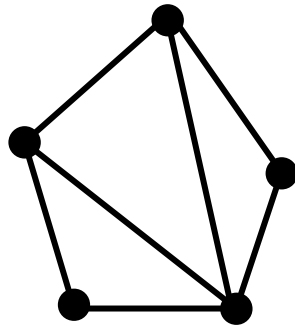
กราฟไม่ระบุทิศทาง



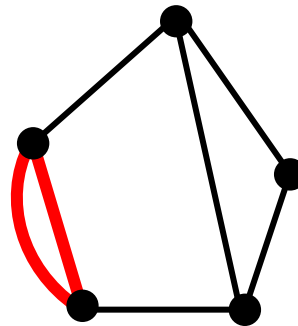
Directed graph

กราฟระบุทิศทาง

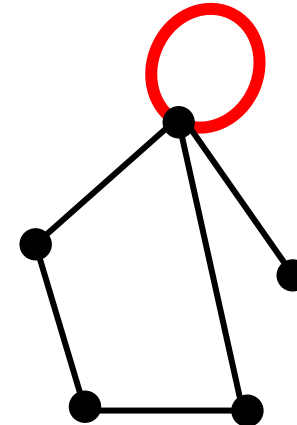
กราฟไม่ระบุทิศทาง



G



H



R

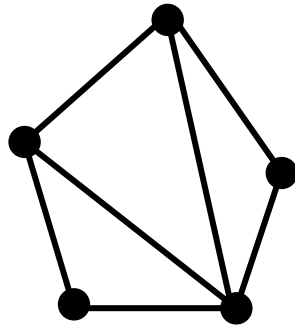
สังเกต

กราฟ **H** มีเส้นเชื่อมขนาน

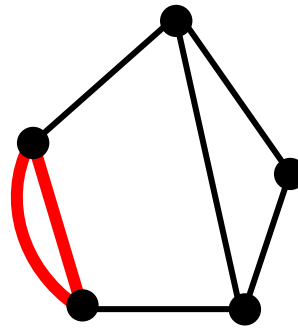
กราฟ **R** มีวงวน

กราฟ **G** ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน ไม่มีวงวน

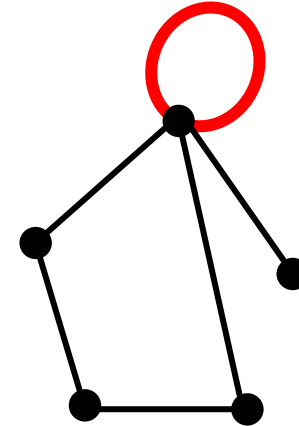
นิยาม



G



H



R

กราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และไม่มีวงวน

→ กราฟเชิงเดียว (simple graph)

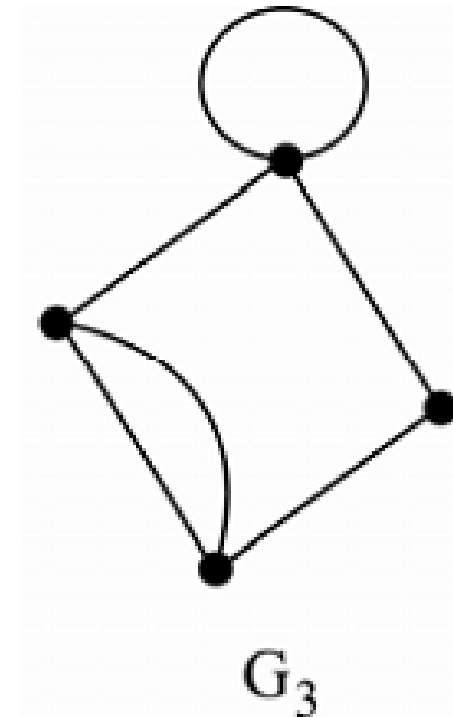
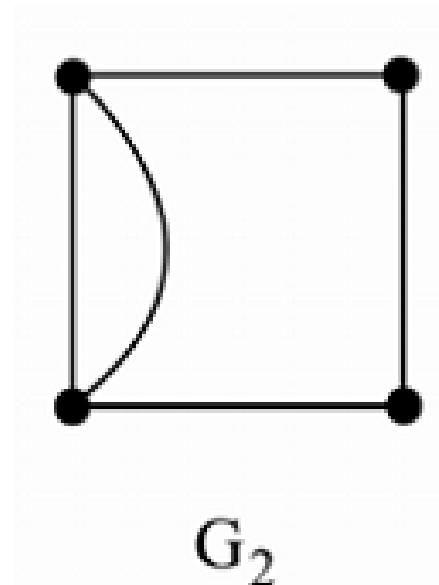
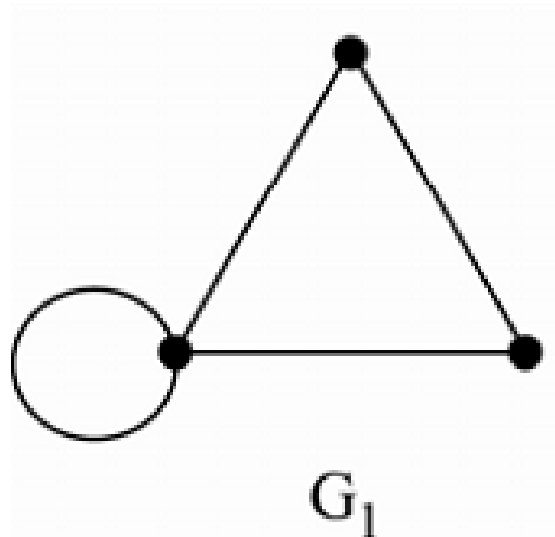
กราฟที่มีเส้นเชื่อมขนาน หรือมีวงวน

→ กราฟหลายเชิง (multi graph)

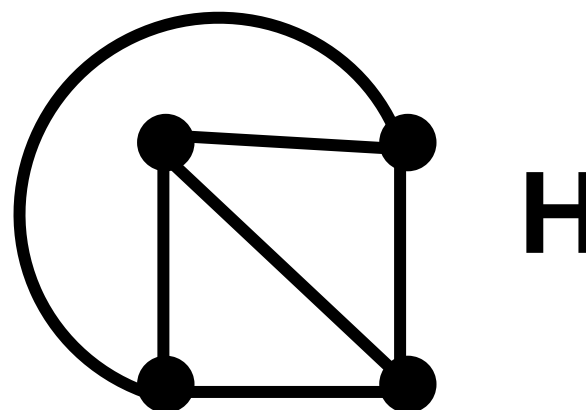
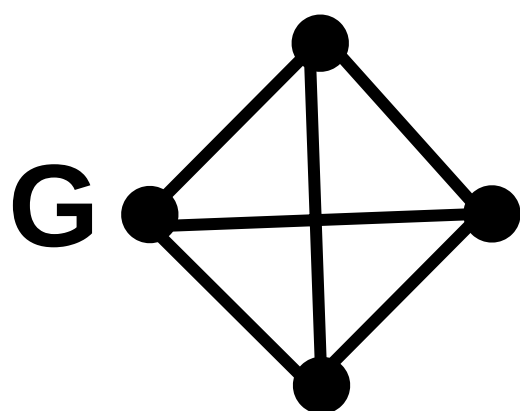
ทดสอบความเข้าใจ

กราฟใดเป็นกราฟเชิงเดียว

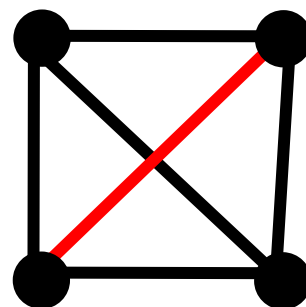
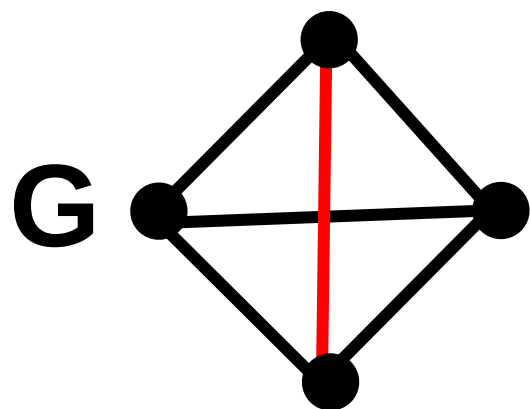
และกราฟใดเป็นกราฟหลายเชิง



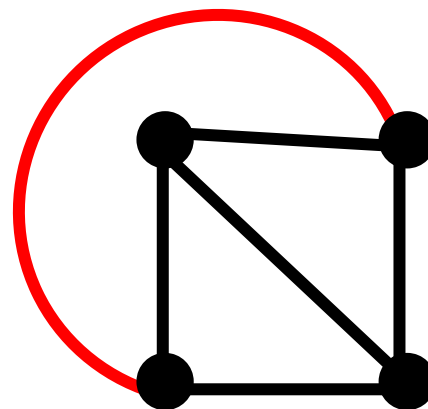
พิจารณากฎ G และ H



สังเกต

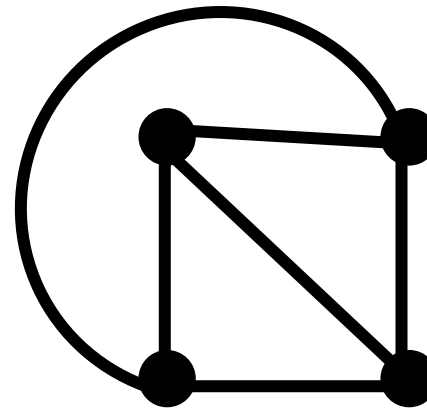
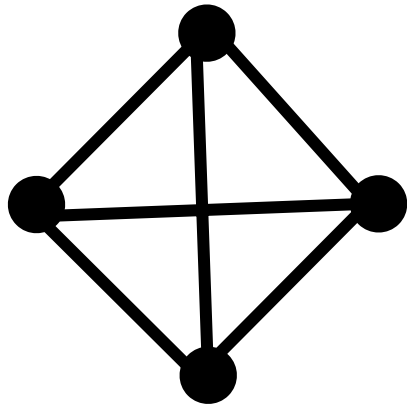


H



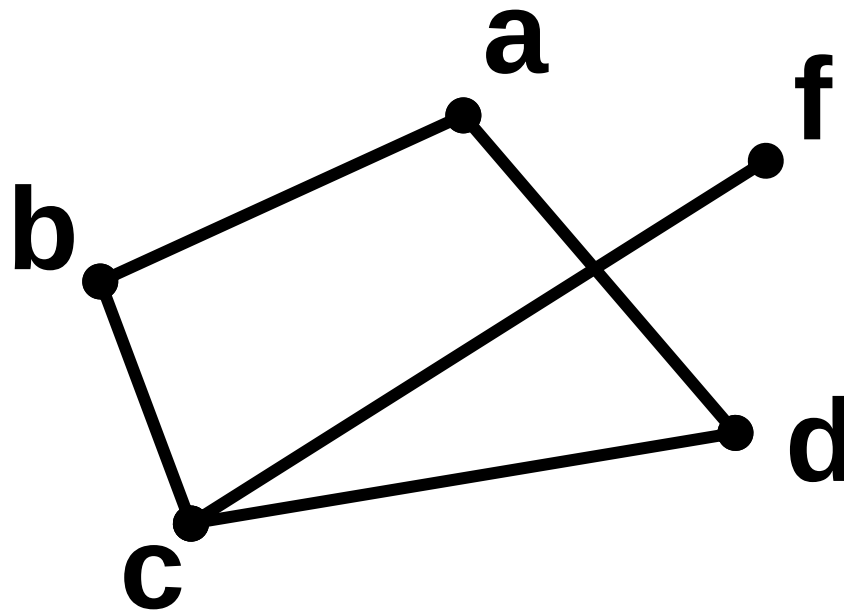
สรุปว่า
G และ H เป็น
กราฟเดียวกัน

กราฟเดียวกัน (identical graphs)



กราฟ G และกราฟ H เป็น กราฟเดียวกัน

ก็ต่อเมื่อ $V(G) = V(H)$ และ $E(G) = E(H)$

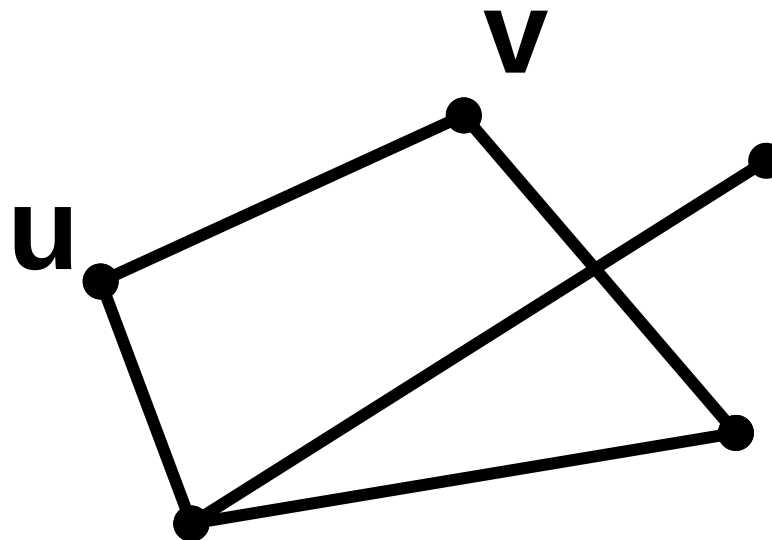


จุดยอด **a** และจุดยอด **b** เป็นจุดยอดประชิด

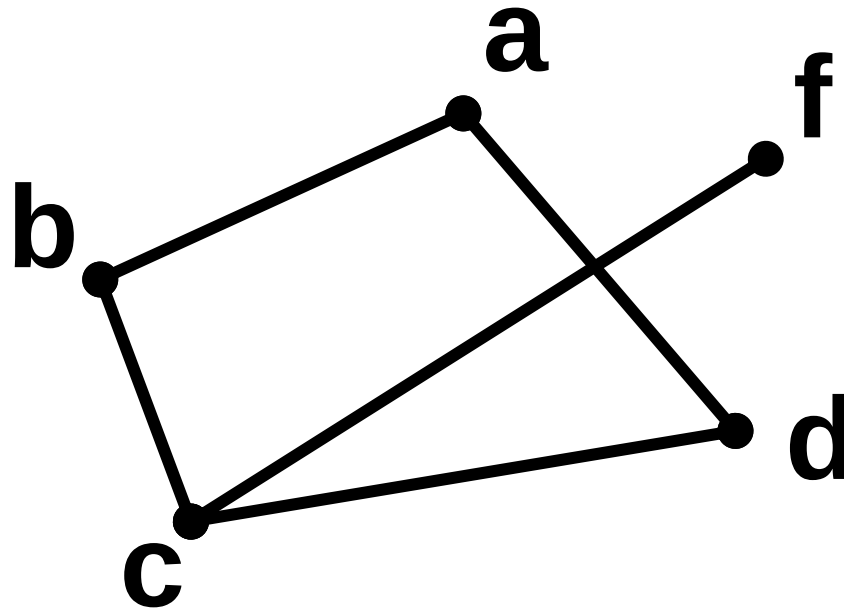
จุดยอด **a** และจุดยอด **d** เป็นจุดยอดประชิด

จุดยอด **c** และจุดยอด **f** เป็นจุดยอดประชิด

นิยาม

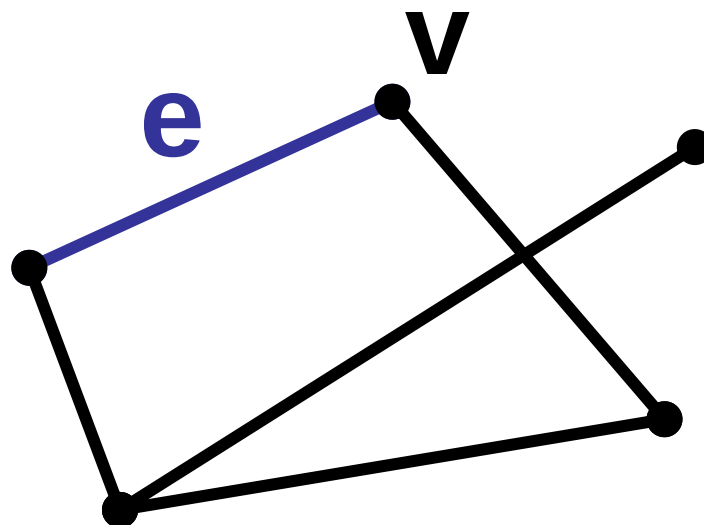


จุดยอด **U** และจุดยอด **V** เป็นจุดยอดประชิด
ก็ต่อเมื่อ มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง



ab และ **ad** เป็นเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด **a**
ba และ **bc** เป็นเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด **b**
cb,cf และ **cd** เป็นเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด **c**
fc เป็นเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด **f**

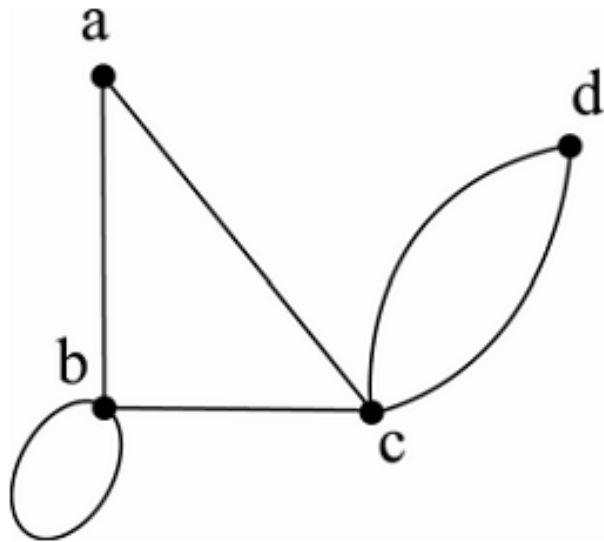
นิยาม



เส้นเชื่อม **e** เกิดกับจุดยอด **v** ถ้า

จุดยอด **v** เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม **e**

พิจารณากาฟต่อไปนี้



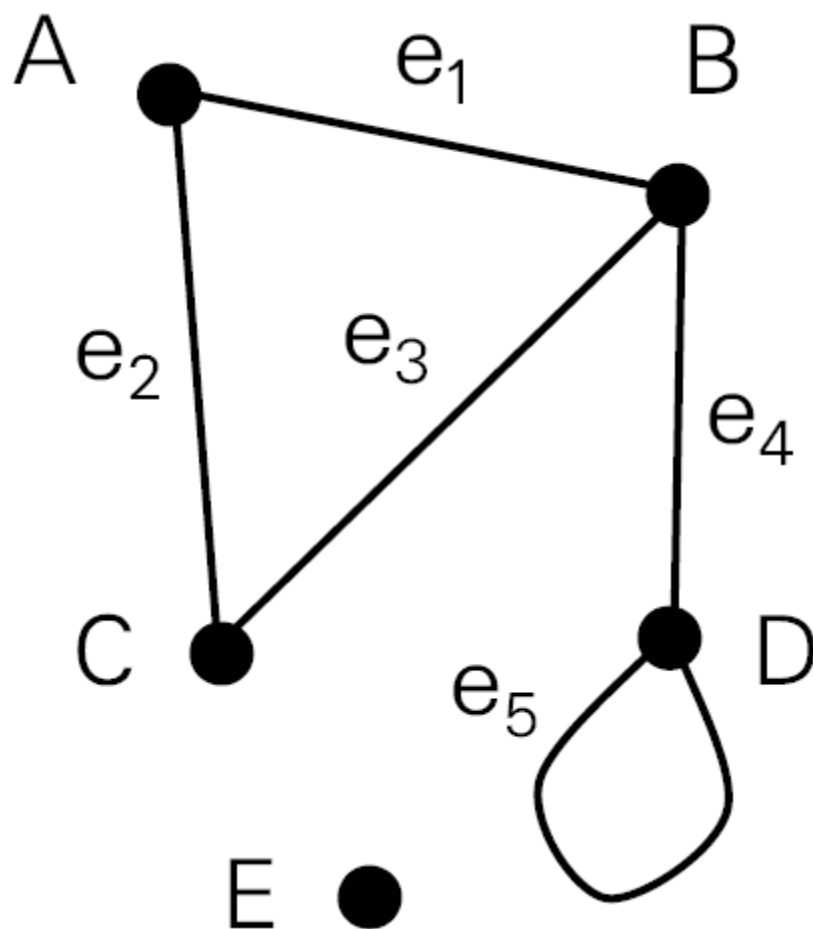
จุดยอด	จำนวนครั้งที่ทั้งหมดที่ เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด
a	2
b	4
c	4
d	2

หมายเหตุ: **วงวน**มีจำนวนครั้งที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดเป็น 2

นิยาม

- ดีกรี (degree) ของจุดยอด v ในกราฟ คือ
จำนวนครั้งที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v
- ใช้สัญลักษณ์ $\deg v$ แทน ดีกรีของ v

พิจารณากาฟต่อไปนี้



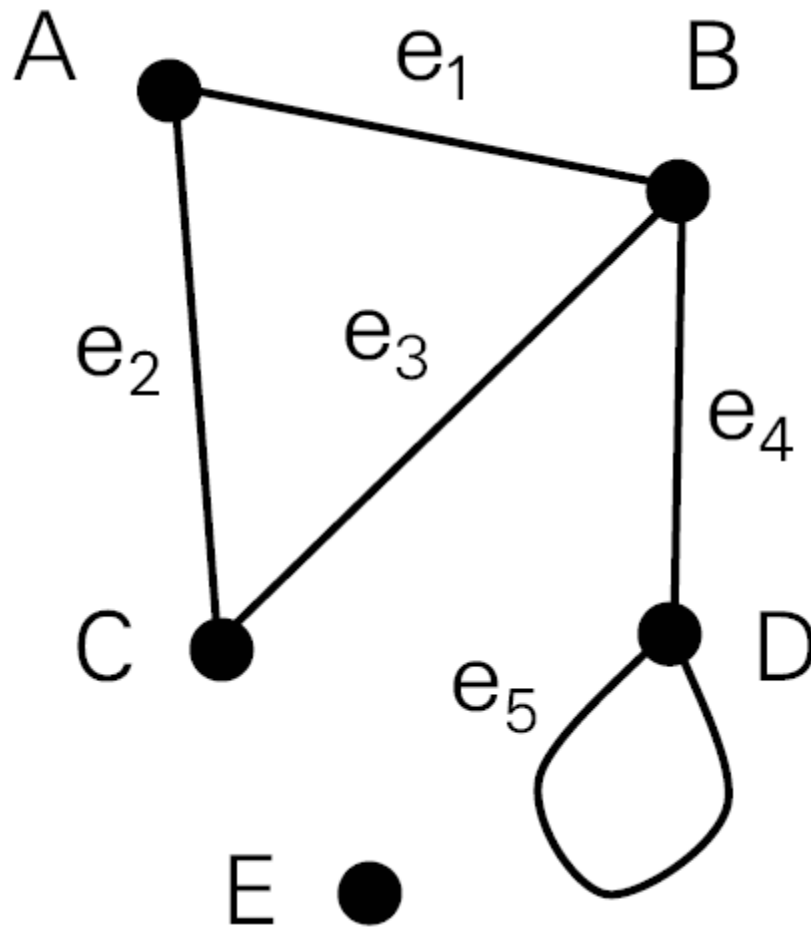
$$\deg A = 2$$

$$\deg B = 3$$

$$\deg C = 2$$

$$\deg D = 3$$

$$\deg E = 0$$



$$\deg A = 2$$

$$\deg B = 3$$

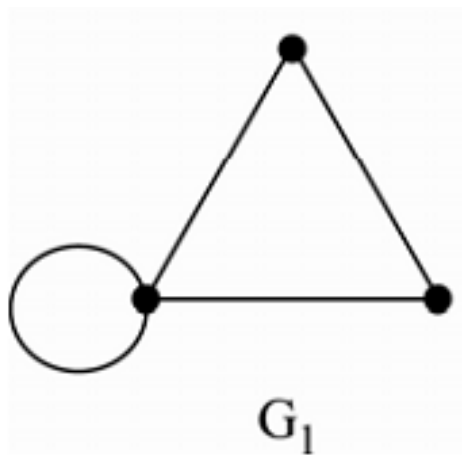
$$\deg C = 2$$

$$\deg D = 3$$

$$\deg E = 0$$

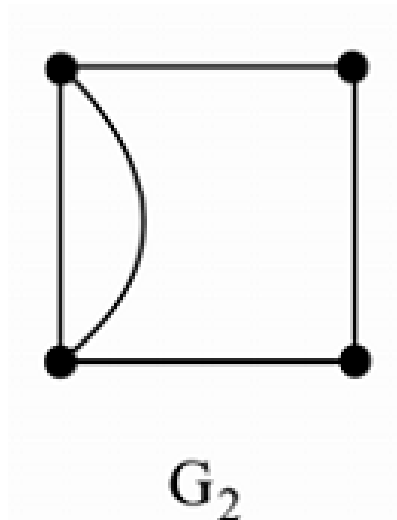
ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุด = $\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 10$

หาจำนวนเส้นเชื่อม และผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุด
ในกราฟแต่ละกราฟต่อไปนี้



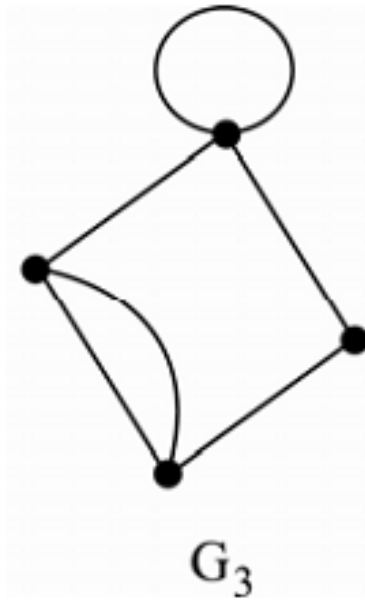
$$\text{จำนวนเส้นเชื่อม} = 4$$

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 8$$



$$\text{จำนวนเส้นเชื่อม} = 5$$

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 10$$



จำนวนเส้นเชื่อม = **6**

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \mathbf{12}$$

พิจารณากฎอื่น ๆ จากเอกสาร และหาจำนวน
เส้นเชื่อมผลรวม และผลรวมของดีกรีของจุดยอด
ทุกจุดในกราฟแต่ละกราฟ
ท่านได้ข้อค้นพบอะไรบ้าง

ทฤษฎีบทที่ 1

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ
เท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

หรือ

จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ เป็นครึ่งหนึ่งของ
ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ

ให้ **G** เป็นกราฟที่มีจำนวนเส้นเชื่อมเป็น **m**
จะได้

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2\mathbf{m}$$

$\sum_{v \in V(G)} \deg v$ เป็นจำนวนคู่เสมอ

ตัวอย่าง 1 มีเส้นเชื่อมกี่เส้นในกราฟที่มีจุดยอด
10 จุด แต่ละจุดยอดมีดีกรีเป็น 6

แนวคิด

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

$$6 \times 10 = 2m$$

$$60 = 2m$$

$$m = 30$$

ตัวอย่าง 2 จงหาจำนวนจุดยอดของกราฟที่มี
เส้นเชื่อม 15 เส้น และมีจุดยอด 3 จุด ที่มีดีกรี 4
ส่วนจุดยอดที่เหลือมีดีกรี 3

แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 3

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

$$(3 \times 4) + 3n = 2 \times 15$$

$$3n = 30 - 12$$

$$n = 6$$

ดังนั้น กราฟนี้มีจำนวนจุดยอด $3 + 6 = 9$ จุด

ตัวอย่าง 3 จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ว่าจะมี
กราฟที่มีจุดยอด 4 จุด และดีกรีของจุดยอดคือ
1, 1, 2 และ 3

แนวคิด

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

$$1+1+2+3 = 2m$$

$$7 = 2m$$

ขัดแย้งกับทฤษฎี ☹

ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่จะมีกราฟดังกล่าว

จบตัวอย่างการนำเสนอ

ผู้สนใจ ติดต่อ อ.สุรพันธ์ อินทสังข์

surat.intasang@gmail.com